Universidade Federal de Goiás

Geometria Analítica - Lista 6

24 de agosto de 2013

1. Suponha que a órbita de um planeta tenha a forma de uma elipse com eixo maior medindo cerca de 500 milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de 400 milhões de quilômetros, encontre a equação reduzida da órbita.

2. Determine o valor da constante m para que a reta $y = mx+8$ seja tangente à elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$.

3. Mostre que, para que a reta $ax + by + c = 0$ seja tangente à parábola $y^2 = kx$, devemos ter $4ac = kb^2$.

4. Esboce a curvas dada pelas equações:

   (a) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$

   (b) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 20 = 0$

   (c) $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$

   (d) $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$

5. Determine a equação da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices $A = (1, 4), B = (3, -2)$ e $C = (7, 2)$.

6. Determine os pontos de interseção das curvas cujas equações são dadas. Além disso, esboce ambas as curvas em um mesmo sistema de eixos exibindo os pontos de interseção.

   (a) $x^2 + 4y^2 = 20$ e $x + 2y = 6$

   (b) $x^2 + 4y^2 = 36$ e $x^2 + y^2 = 12$

7. Deduza as equações reduzidas de todas as quádricas estudadas, com centro em um ponto $O = (x_0, y_0, z_0)$, ou seja, de todas as quádricas transladadas. Dica: É similar ao que fizemos com as cônicas. Por exemplo, a equação reduzida de uma esfera com centro no ponto $O = (x_0, y_0, z_0)$ e raio r é

$$\frac{(x-x_0)^2}{r^2} + \frac{(y-y_0)^2}{r^2} + \frac{(z-z_0)^2}{r^2} = 1.$$

8. Seja S uma esfera e r uma reta. Se $S \cap r = \{(a,b,c)\}$, dizemos que r é tangente a S em (a,b,c) e que (a,b,c) é o ponto de tangência. Dizemos também que r e S são tangentes. Se $S \cap r$ contém dois pontos distintos, dizemos que r é secante a F. Se $S \cap r = \emptyset$, dizemos que r é exterior a S.

   (a) Determine a interseção entre a reta $r : X = (1,0,2) + \lambda(-1,1,1)$ e a esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 23 = 0$.

   (b) Verifique se $r : x = y - 1 = z$ é tangente a $S : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{8}{3}$, e se for o caso, determine o ponto de tangência.

   (c) Calcule a para que $r : x = y = z - a$ seja exterior a $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z - 3 = 0$.

   Dica: Use exercício anterior e pense na distância da origem da esfera à reta dada.

9. Observe que podemos elaborar um exercício similar ao anterior, simplesmente trocar a reta por um plano. Você saberia dizer, quando um plano é tangente a uma circunferência em um ponto $P = (a,b,c)$? E elaborar um exercício com esta característica? Faça isso!

10. Pense e escreva como seria razoável definir o que é um vetor normal a uma esfera S num ponto $P \in S$.

11. Pense e descreva usando um desenho, quais são as possíveis posições relativa a duas esferas. Depois disso, estude a posição relativa e descreva a interseção das esferas $S_1 : x^2 + y^2 + x^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + x^2 + 2x + 2y + 2z - 4 = 0$.

12. Nos casos em que a intersseção do plano π com o elipsóide S for uma elipse, determine seu centro, focos e vértices. Se for uma circunferência, determine o centro e o raio.

(a) $S : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1, \qquad \pi : y - 5 = 0$

(b) $S : x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36, \qquad \pi : x + 2\sqrt{5} = 0$

(c) $S : 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 2, \qquad \pi : z + \frac{1}{3} = 0$

Obs. Um exercício análogo a este pode ser elaborado tomando S como qualquer outra quádrica.

13. Você conhece todas as equações das quádricas que estudamos no curso? Se não, faça uma tabela com todas elas e compare-as(não deixe de fazer isso!). Se já conhece, diga que quádricas as equações abaixo representam. Em seguida, faça um esboço da superfície.

(a) $25x^2 + 16y^2 + 25z^2 = 400$

(b) $x^2 + y^2 + x^2 - 2x - 2y - 2z + 7 = 0$

(c) $x^2 - 4y^2 + 5z^2 = 1$

(d) $-3x^2 - 4z^2 + 5y^2 = -43$

(e) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$

(f) $z + x^2 + 3y^2 = 0$

(g) $z = -x^2 + \frac{y^2}{4}$

Referências

[PB] Ivan de Camargo, Paulo Boulos. Um curso de Geometria Analítica: um tratamento vetorial, 3a edição (2005).**(Livro texto)**